На правах рукописи

Семенова Алена Валерьевна

ОПЕРАДЫ КОНЕЧНЫХ ПОМЕЧЕННЫХ ГРАФОВ И РЕШЕТОК

Специальность 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандитата физико-математических наук

Казань — 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова Ленина

Научный руководитель:	кандидат физико-математичских наук, доцент Тронин Сергей Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Артамонов Вячеслав Александрович
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Абызов Адель Наилевич
Ведущая организация:	Ульяновский государственный университет

Защита состоится " 4 " декабря 2008г. в 14.40 на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 в конференц-зале Научной библиотеки имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета по адресу: ул.Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "   " октября 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент А.И.Еникеев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Место, которое занимает теория операд в алгебре, можно кратко охарактеризовать следующим образом. В работах С.Н.Тронина[1] [2] показано, что каждое многообразие универсальных алгебр рационально эквивалентно многообразию алгебр над некоторой операдой. Точнее, в первой статье было введено понятие операды над вербальной категорией, и фактически речь идет о рациональной эквивалентности данного многообразия и многообразия алгебр над $FSet$–операдой (т.е. операдой над вербальной категорией $FSet$). Традиционные операды — это симметрические операды, операды над вербальной категорией Σ, являющейся подкатегорией $FSet$. Таким образом, в первом приближении можно сказать, что теория многообразий алгебр над операдами — это теория обычных многообразий алгебр "по модулю" отношения рациональной эквивалентности, введенного А.И.Мальцевым[3] (см. также книгу А.Г.Пинуса[4]).

Характерная черта операдного подхода состоит в том, что у рассматриваемых алгебр нет изначально выделенного небольшого количества операций, и следовательно, не имеет смысла говорить о тождествах. Все необходимые для определения свойства заключены в самой операде. В различных разделах математики можно встретить множество естественных примеров операд, алгебры над которыми невозможно или трудно описать "классическими" средствами общей (или универсальной) алгебры. В трудах В.А.Смирнова[5], Борд-

[1]Тронин, С.Н. Абстрактные клоны и операды / С.Н. Тронин // Сибирский математический журнал. — 2002. — Т. 43. — № 4. — С. 924–936.

[2]Тронин, С.Н. Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами / С.Н. Тронин // Сибирский математический журнал. — 2006. — Т. 47. — № 3. — С. 670 – 694.

[3]Мальцев, А.И. Структурная характеристика некоторых классов алгебр / А.И. Мальцев // Доклад АН СССР. — 1958. — Т. 120. — № 1. — С. 29 – 32.

[4]Пинус, А.Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений / А.Г. Пинус // Новосибирск: НГТУ. — 2002. — 239 с.

[5]Смирнов, В.А. Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий / В.А. Смирнов. — М.: Изд-во "Факториал Пресс". — 2002. — 272 с.

мана Дж., Фогта Р.[6], May J.P.[7], Leinster T.[8], Markl M., Shnider S., Stasheff J.[9] описаны многочисленные примеры операд, возникающих в топологии, гомологической алгебре, теории категорий и даже в физике. При этом, однако, чисто алгебраические аспекты теории операд остаются несколько в стороне.

Целью данной работы является изучение операд (и алгебр над этими операдами), возникающих естественным образом в теории графов, теории частично упорядоченных множеств и теории решеток. В известных нам работах по теории операд эта тематика практически полностью отсутствует.

С другой стороны, в работах по теории графов, теории частично упорядоченных множеств и решеток невозможно найти упоминания об операдах. В частности, известные книги по "алгебраической" теории графов Biggs N.[10], Chris D Godsil, Gordon F Royle[11] не содержат ничего даже отдаленно похожего. Наш подход заключается в том, что сами совокупности конечных (помеченных) графов, частично упорядоченных множеств и решеток являются операдами, т.е. алгебраическими объектами, и заслуживают подробного изучения.

Интересно отметить, что этот подход возник все-таки не совсем на пустом месте. Частный случай той операции (операдной композиции), которая превращает семейство конечных помеченных графов в операду, был давно известен как "сумма Зыкова" (Харари Ф.[12], с.36).

С другой стороны, в теории круговых турниров давно известны понятия, являющиеся частными случаями композиции в операдах графов, частично упорядоченных множеств и решеток, а также (операдно) неразложимых элементов в этих операдах (см. Boudabbous Y., Dammak J., Ille P.[13]).

Наконец, можно отметить (хотя это и лежит несколько в стороне от темы

[6]Бордман, Дж. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах: пер. с англ. / Дж. Бордман, Р. Фогт. — М.: Мир. — 1977. — 408 с.

[7]May, J.P. Definitions operads, algebras and modules / J.P. May // Contemporary Mathematics. — 1997. — V. 202. — P. 1–7.

[8]Leinster, T. Higher Operads, Higher Categories / T. Leinster // London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press. — 2003. — 380 p.

[9]Markl, M. Operads in Algebra, Topology and Physics / M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff // American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs. — 2002. — V. 96. — 349 p.

[10]Biggs, N. Algebraic graph theory / N. Biggs. — Cambridge University Press. — 1994. — 213 p.

[11]Chris D Godsil Algebraic graph theory / Chris D Godsil, Gordon F Royle // Springer. — 2001. — 439 p.

[12]Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. — М.: Мир. — 1973. – 301 с.

[13]Boudabbous, Y. Indecomposability and duality of tournaments / Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille // Discrete Mathematics. — 2000. — V. 223. — № 1. — P. 55–82

нашей работы), что в теории двухполюсников (Яблонский С.В.[14], ч.III, гл.2, пар.3) встречается множество понятий и результаты, аналогичные понятиям и результатам из теории операд. В частности, семейство двухполюсников (с помеченными стрелками) образует операду относительно указанной в данной книге операции подстановки, и понятия неразложимых и разложимых двухполюсников совершенно аналогичны изучаемым в нашей работе понятиям разложимых и неразложимых графов.

Таким образом, наша работа лежит на стыке теории операд, теории многообразий универсальных алгебр, теории графов и теории решеток. Изучаемые нами объекты — операды конечных помеченных графов (разных типов), частично упорядоченных множеств и решеток — это естественно определяемые объекты, и свойства разложимости и неразложимости элементов этих операд обобщают давно встречающиеся в литературе частные случаи.

Целью работы является изучение операд (и алгебр над этими операдами), возникающих в теории графов, теории частично упорядоченных множеств и теории решеток. В частности, нахождение новых примеров операд, нахождение критериев разложимости и неразложимости в операдную композицию элементов этих операд, явное вычисление многообразий алгебр над некоторыми из этих операд.

Методы исследования.

В диссертационной работе использованы методы теории операд, теории многообразий универсальных алгебр, теории графов и теории решеток.

Научная новизна.

1. Найдены новые примеры операд. В частности, найдены операдные структуры на множествах известных классических объектов.

2. Получены критерии разложимости элементов найденных операд, в частности, графов, или неразложимости в операдную композицию.

[14] Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. — М.: Высшая школа. — 2002.— 384 с.

3. Выделены неразложимые (в операдном смысле) ("простые") элементы операд (графы, решетки и т.д.).

4. Описаны дополнительные структуры (структуры W–операд, в частности, $FSet$ или Epi–операд) на найденных операдах.

5. Вычислены (с точностью до рациональной эквивалентности) многообразия алгебр над найденными операдами.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях в теории многообразий универсальных алгебр, теории операд, теории графов и теории решеток.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Построены новые примеры операд, элементы которых можно интерпретировать как конечные помеченные графы (неориентированные и ориентированные).

2. Получены критерии разложимости и неразложимости элементов построенных операд в операдную композицию.

3. Найден явный вид многообразия алгебр над двумя из построенных операд, т.е. найдены системы операций и определяющие тождества.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: "Международная молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения — 2002" в Казанском государственном университете (г.Казань, 2002 г.), "Международная летняя школа–конференция "Лобачевские чтения — 2003" в Казанском государственном университете (г.Казань, 2003 г.), "Третья всероссийская молодежная научная школа–конференция "Лобачевские чтения — 2003" в Казанском государственном университете (г.Казань, 2003 г.), "Международная конференция, посвященная 200–летию КГУ, "Алгебра и Анализ 2004" (г.Казань, 2004 г.), на семинарах кафедры алгебры КГУ в 2000–2006 гг. (руководитель — кандидат физико–математических наук, доцент С.Н.Тронин) и итоговых конференциях кафедры алгебры Казанского государственного университета им. В.И.Ульянова-Ленина.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 7 работ, их список помещен в конце автореферата. Результаты, полученные в совместной с научным руководителем работе, принадлежат авторам в равной мере.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа изложена на 109 страницах и состоит из введения, четырех глав, библиографического списка использованных источников, включающего 41 наименование, и списка публикаций автора по теме диссертации из 7 наименований.

Содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность работы и формулируются основные утверждения диссертации.

В **первой главе** изложены все необходимые определения и некоторое количество простых примеров из теории операд. Мы используем обобщение операд, введенное С.Н.Трониным[15], — операды над вербальными категориями. Во втором параграфе первой главы содержится первый основной результат работы: конструкция операды квадратных матриц.

Пусть K — некоторое множество с выделенным элементом ε. $\mathfrak{m}_{n,k} = \mathfrak{m}_{n,k}(K)$ множество всех $n \times k$ — матриц с компонентами из K. Определим две операции композиции. Пусть $B_i \in \mathfrak{m}_{n_i,k_i}$, $1 \le i \le m$, $A \in \mathfrak{m}_{m,m}$, $A = (a_{ij})$, $1 \le j \le m$. Операция композиции, которую будем называть композицией 1, определяется так:

[15]Тронин, С.Н. Абстрактные клоны и операды / С.Н. Тронин // Сибирский математический журнал. — 2002. — Т. 43. — № 4. — С. 924–936.

$$AB_1B_2\ldots B_m = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{a}_{12} & \ldots & \overline{a}_{1m} \\ \overline{a}_{21} & B_2 & \ldots & \overline{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \ldots & B_m \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$AB_1B_2\ldots B_m$ — блочная $(n_1+\ldots+n_m)\times(k_1+\ldots+k_m)$ — матрица, разбитая на блоки размерами $n_i \times k_j$, и $\overline{a}_{ij}$ в (1) — это матрица размера $n_i \times k_j$, заполненная одним и тем же элементом a_{ij} из A, т.е. $\overline{a}_{ij} = a_{ij}J_{n_i,k_j}$, где J_{n_i,k_j} — матрица, состоящая из единиц.

Пусть теперь K — моноид с единицей ε. Операция композиции, которую будем называть композицией 2, определяется так:

$$AB_1B_2\ldots B_m = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11}B_1 & \overline{a}_{12} & \ldots & \overline{a}_{1m} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22}B_2 & \ldots & \overline{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \ldots & \overline{a}_{mm}B_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Соглашения здесь те же самые, что и выше.

На $\mathfrak{M}(n)$ и $\overline{\mathfrak{M}}(n)$ слева действует группа подстановок n-й степени Σ_n следующим образом. Если $A = (a_{ij})$, $1 \le i,j \le n$, $a_{ij} \in K$, $\sigma \in \Sigma_n$, то матрица σA состоит из элементов

$$(\sigma A)_{ij} = a_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} \qquad (3)$$

Определим два семейства множеств $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{M}(n) |\ n = 1,2,\ldots\}$, $\overline{\mathfrak{M}} = \{\overline{\mathfrak{M}}(n) |\ n = 1,2,\ldots\}$.

Теорема 1 .

1) *Семейство $\mathfrak{M}$ с операцией композиции 1 и действием симметрических групп (3) становится операдой.*

2) *Семейство $\overline{\mathfrak{M}}$ с операцией композиции 2 и действием симметрических групп (3) становится операдой.*

3) *Множество $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{n,k\ge 1} \mathfrak{M}_{n,k}$ превращается в алгебру над операдой $\mathfrak{M}$, если определить композицию по формуле (1), и в алгебру над операдой $\overline{\mathfrak{M}}$,*

если определить композицию по формуле (2). При этом операды $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ надо считать несимметрическими (т.е. исключить из их определения действвия симметрических групп).

В **главе 2** некоторые подоперады описанных выше операд квадратных матриц интерпретируются таким образом, что их элементами можно считать конечные помеченные графы (тех или иных видов). Это достигается соответствием графу Γ его матрице инцидентности $A(\Gamma)$, которое в случае, если вершины Γ снабжены метками (числами $1, \ldots, n$), является взаимно однозначным. В этой главе исследовалась разложимость и неразложимость элементов операды графов (ориентированных и неориентированных) в операдную композицию. Построены новые примеры операд.

В **главе 3** рассматриваются операды графов с несколько иной, чем в главе 2 операдной композицией: она соответствует композиции 2 из главы 1. Оказалось, что в этом случае на операдах (G, $DirG$) можно ввести структуру Epi — операды. Здесь Epi — вербальная категория, морфизмы которой — все сюръективные отображения из конечных множеств $[n] = \{1, \ldots, n\}$ в $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Действие такого отображения f на граф Γ с n вершинами $f\Gamma$ — это некоторая разновидность стягивания вершин (с последующим отождествлением ребер). Это позволяет выразить все графы через операдную композицию двух графов Γ_+, $\Gamma_\times$ и описанных выше действий отображений f.

Наконец, главным результатом главы 3 является следующая теорема.

Теорема 2 . *Многообразие $Alg(G)$ алгебр над операдой G рационально эквивалентно многообразию алгебр с двумя бинарными операциями сложения и умножения, и с одной константой θ, причем должны выполняться следующие десять тождеств:*

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1;$$

$$a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1;$$

$$a_1 + \theta = a_1;$$

$$a_1 \cdot \theta = a_1;$$

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3);$$

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3);$$

$$a + a = a;$$

$$a \cdot a \cdot a = a \cdot a;$$

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3;$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3.$$

Аналогичный результат справедлив для ориентированных графов (выполняются те же тождества, за исключением $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1$).

Глава 4 посвящена изучению операды конечных помеченных решеток. Частично упорядоченные множества и решетки можно рассматривать как частный случай ориентированных графов. Оказывается, что если L_0, L_1, $\ldots$,L_n — конечные помеченные частично упорядоченные множества (ориентированные графы), то композиция 1 из главы 1 $L_0 L_1 \ldots L_n$ — снова частично упорядоченное множество, а если L_0, L_1, $\ldots$, L_n — решетки, то $L_0 L_1 \ldots L_n$ — также решетка. Обозначим через Lat операду, n — ая компонента которой $Lat(n)$ состоит из всех конечных помеченных решеток с n элементами. Во втором параграфе главы 4 доказана следующая теорема:

Теорема 3 . *Конечная решетка операдно разложима тогда и только тогда, когда в ней существует операдно разлагающий интервал.*

Эта теорема дает инструмент для изучения разложимости и неразложимости в Lat.

Основная цель главы 4 — описание большого количества неразложимых решеток.

Теорема 4 . *Если L_1, L_2 — нетривиальные конечные помеченные решетки, то $L_1 \times L_2$ — операдно неразложимая решетка.*

Теорема 5 . *Операдно неразложимыми являются следующие классы конечных помеченных решеток:*

1) *Атомно порожденная решетка;*

2) *Коатомно порожденная решетка;*

3) *Простая решетка;*

4) *Решетка с относительными дополнениями;*

5) *Геометрическая решетка.*

Теорема 6 . *Модулярная решетка с дополнениями операдно неразложима. Существуют модулярные операдно разложимые решетки, которые представимы в виде $CL_1 \dots L_m$, где C — цепь.*

Теорема 7 . *Пусть L — конечная дистрибутивная решетка. Тогда либо L операдно неразложима, либо существует $w \neq 0, 1$ такой, что для любого $x \in L$ либо $x \leq w$, либо $x \geq w$. (Т.е. $L = [0, w] \cup [w, 1]$, в этом случае L разложима, и следовательно, представима в виде $CL_1 \dots L_m$, где C — цепь, L_i — дистрибутивная решетка, $i = 1, \dots, m$).*

Основные выводы.

1. Построены новые примеры операд, элементы которых можно интерпретировать как конечные помеченные графы (неориентированные и ориентированные).

2. Получены критерии разложимости и неразложимости элементов построенных операд в операдную композицию.

3. Найден явный вид многообразия алгебр над двумя из построенных операд, т.е. найдены системы операций и определяющие тождества.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Сергею Николаевичу Тронину за постоянное внимание к работе, терпение и поддержку, а также за постановку задачи.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Тронин, С.Н. Операды конечных помеченных графов / С.Н. Тронин, А.В. Семенова // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2004. — №4. — С. 50–60.

[2] Семенова, А.В. Алгебры над операдой конечных помеченных графов / А.В. Семенова // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2006. — №6. — С. 65–73.

[3] Семенова, А.В. Операда конечных помеченных решеток / А.В. Семенова // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2008. — №2. — С. 77–80.

[4] Семенова, А.В. Операда конечных помеченных решеток / А.В. Семенова // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 18 // Лобачевские чтения — 2002. — Казань: Казанское математическое общество. — 2002. — С. 81–82.

[5] Семенова, А.В. Операдно неразложимые решетки / А.В. Семенова // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.19 // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. — Казань: Казанское математическое общество. — 2003. — С. 195.

[6] Семенова, А.В. Операдная неразложимость атомно и коатомно порожденных решеток / А.В. Семенова // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 21. // Лобачевские чтения — 2003. — Казань: Казанское математическое общество. — 2003. — С. 196–198.

[7] Семенова, А.В. Алгебры над операдой графов / А.В. Семенова // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 23. // Алгебра и анализ — 2004. — Казань: Казанское математическое общество. — 2004. — С. 68–69.